Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. Se desea vallar un terreno rectangular usando 100 metros de una tela metálica. Se ha decidido dejar una abertura de 20 metros sin vallar en uno de los lados de la parcela para colocar una puerta. Calcular las dimensiones de todos los lados de la parcela rectangular de área máxima que puede vallarse de esa manera. Calcular el valor de dicha área máxima. (2,5 ptos)

Sean **B** y H los lados del rectángulo

$$\begin{cases} B+B-20+2H=100 \rightarrow 2B+2H=120 \rightarrow 2(B+H)=120 \rightarrow B+H=60 \rightarrow B=60-H \\ A=B.H \end{cases} \rightarrow A=(60-H)H$$
$$=60H-H^2 \rightarrow$$

$$A'=\frac{dA}{dH}=60-2H \rightarrow A'=0 \rightarrow 60-2H=0 \rightarrow 2H=60 \rightarrow H=30 \rightarrow A''=\frac{dA'}{dH}=-2<0 \rightarrow Máximo$$
$$\begin{cases} H=30\ m. \\ B=60-30=30\ m \end{cases} \rightarrow A=30.30=900\ m^2$$

2. Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y sea $\mathbf{I_2}$ la matriz identidad de orden **2**

a) Calcular el valor de *x* de modo que se verifique la igualdad: $\mathbf{B^2 = A}$ (0,5 ptos)

b) Calcular el valor de *x* para que $\mathbf{A - I_2 = B^{-1}}$ (1,5 ptos)

c) Calcular el valor de *x* para que $\mathbf{A.B = I_2}$ (0,5 ptos)

a)

$$\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x+1=2 \rightarrow x=1 \end{cases} \rightarrow x=1$$

b)

$$|B|=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0 \rightarrow Existe\ B^{-1} \rightarrow B^{-1}=\frac{1}{|B|}.adj\ (B)^t \rightarrow (B)^t=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow adj\ (B)^t=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$
$$B^{-1}=\frac{1}{(-1)}.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$
$$\begin{cases} x-1=1 \rightarrow x=0 \\ x=0 \end{cases}$$

c)

$$\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x+1 \\ x+1 & x+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x+1=0 \rightarrow x=-1 \\ x+2=1 \rightarrow x=-1 \end{cases} \rightarrow x=-1$$

3. Dados los planos $\pi_1: x - y + 3 = 0$ y $\pi_2: 2x + y - z = 0$, calcular:
a) La ecuación de la recta s paralela a los planos π_1 y π_2 que pasa por el punto B(2 , 2 , 3) (1,5 ptos)
b) El ángulo que forman los planos π_1 y π_2 (1 pto)

a)
La ecuación de la recta s paralela a los planos π_1 y π_2 que pasa por el punto B(2 , 2 , 3) (1,5 ptos)

La recta **s** paralela tendrá como vector director la recta intersección **r** de ambos planos

$$\begin{cases} \pi_1: x - y + 3 = 0 \\ \pi_2: 2x + y - z = 0 \end{cases} \rightarrow 3x - z + 3 = 0 \rightarrow z = 3x + 3 \rightarrow y = 3 + x \rightarrow r: \begin{cases} x = \alpha \\ y = 3 + \alpha \\ z = 3 + 3\alpha \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{v_r} = (1, \quad 1, \quad 3) \rightarrow$$

$$s: \begin{cases} x = 2 + \beta \\ y = 2 + \beta \\ z = 3 + 3\beta \end{cases}$$

b)
Se calculará el coseno del ángulo que forman los vectores directores de los dos planos

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{\pi_1}} = (1, \quad -1, \quad 0) \\ \overrightarrow{v_{\pi_2}} = (2, \quad 1, \quad -1) \end{cases} \rightarrow \cos\theta = \frac{\left|\overrightarrow{v_{\pi_1}}.\overrightarrow{v_{\pi_2}}\right|}{\left|\overrightarrow{v_{\pi_1}}\right|.\left|\overrightarrow{v_{\pi_2}}\right|} = \frac{|(1, \quad -1, \quad 0).(2, \quad 1, \quad -1)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}.\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|1.2 + (-1).1 + 0.(-1)|}{\sqrt{2}.\sqrt{6}}$$

$$\cos\theta = \frac{|1|}{\sqrt{12}.} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \rightarrow \theta = arc\cos\frac{\sqrt{3}}{6} = 73º13'17''$$

4. En un banco se sabe que el tiempo de devolución de un préstamo de 18000€ sigue una distribución normal de media 60 meses y desviación típica 8 meses. Se elige al azar un préstamo de 18000€ realizado en dicho banco:
a) Calcular la probabilidad de que dicho préstamo se devuelva como mucho en 70 meses (0,75 ptos)
b) ¿Cuál es la probabilidad de que fuera devuelto, al menos en 4 años? (0,75 ptos)
c) ¿Qué porcentaje de préstamos de 18000€ del mismo banco se formalizan para ser devueltos entre los 4 y los 6 años? (1 pto)

La devolución del préstamo es un variable aleatoria **X** que **sigue una normal N(μ, σ) = N(60, 8)** medido en meses.

a)
Calcular la probabilidad de que dicho préstamo se devuelva como mucho en 70 meses.

Me piden **$p(X \leq 70)$ =** $p\left(Z \leq \frac{70 - 60}{8}\right) = p(Z \leq 1'25)$ **= 0'8944**

b)
¿Cuál es la probabilidad de que fuera devuelto, al menos en 4 años?

Me piden **$p(X \geq 4\cdot(12)) = p(X \geq 48)$ =** $p\left(Z \geq \frac{48 - 60}{8}\right) = p(Z \geq -1'5) = 1 - p(Z \leq -1{,}5)]$ **=**

= $1 - [1 - p(Z \leq 1'5)]$ **=** $p(Z \leq 1'5)]$ = **0'9331.**

c)
¿Qué porcentaje de préstamos de 18000€ del mismo banco se formalizan para ser devueltos entre los 4 y los 6 años?

Me piden $p(4\cdot(12) \leq X \leq 6\cdot(12)) = p(48 \leq X \leq 72) = p\left(\frac{48 - 60}{8} \leq Z \leq \frac{72 - 60}{8}\right) = p(-1'5 \leq Z \leq 1'5) =$

$= p(Z \leq 1'5) - p(Z \leq -1'5)] = p(Z \leq 1'5) - [1 - p(Z \leq 1'5)] = 2\cdot p(Z \leq 1'5) - 1 = 2\cdot 0'9332 - 1$ **= 0'8664 = 86'64 %.**

OPCIÓN B

1. Dada la siguiente expresión de la función ***f***, de la que se desconocen algunos valores:

$$f(x) = \begin{cases} a - x & si \ \ x \leq 1 \\ \dfrac{b}{x} - \ln x & si \ \ x > 1 \end{cases}$$

Calcular los valores de *a* y *b* para que ***f*** sea derivable en todo su dominio. Escribir la función resultante. (2,5 ptos)

Para ser derivable primero tiene que ser continua en **x = 1**

$$f(x) = \begin{cases} f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = a - 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \dfrac{b}{1} - \ln 1 = b - 0 = b \end{cases} \to f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \to a - 1 = b$$

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & si \ \ x < 1 \\ -\dfrac{b}{x^2} - \dfrac{1}{x} & si \ \ x > 1 \end{cases} \to \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\dfrac{b}{1^2} - \dfrac{1}{1} = -b - 1 \end{cases} \to \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \to -b - 1 = -1$$

$$\begin{cases} \mathrm{a} - 1 = \mathrm{b} \\ -\mathrm{b} - 1 = -1 \to \mathrm{b} = 0 \end{cases} \to \mathrm{a} - 1 = 0 \to \mathrm{a} = 1 \to \boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{1 - x} & \boldsymbol{si \ \ x \leq 1} \\ \mathbf{-\ln x} & \boldsymbol{si \ \ x > 1} \end{cases}$$

2. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones matriciales: (2,5 ptos)

$$\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix} \\ X - 2Y = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix} \\ -2X + 4Y = (-2).\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -4 \\ 14 & -6 & 2 \end{pmatrix} \end{cases} \to 7Y = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -4 & -4 \\ 14 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & -7 & 0 \\ 21 & -7 & 14 \end{pmatrix}$$

$$Y = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 14 & -7 & 0 \\ 21 & -7 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

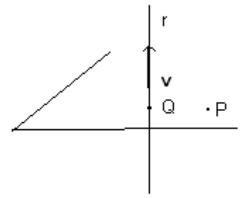
$$\begin{cases} 4X + 6Y = 2.\begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix} \\ 3X - 6Y = 3.\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{cases} \to 7X = \begin{pmatrix} 16 & -6 & 8 \\ 14 & -2 & 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & 6 & 6 \\ -21 & 9 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 14 \\ -7 & 7 & 21 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 & 0 & 14 \\ -7 & 7 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Se consideran los puntos A(2, -1, 1) y B(-2 , 3, 1) que determinan la recta r
a) Calcular la recta perpendicular a r que pasa por el punto P(- 4, 17, 0). (1,25 ptos)
b) Calcular la ecuación del plano respecto del cual los puntos A y B son simétricos. (1,25 ptos)

a)
Calcular la recta perpendicular a r que pasa por el punto P(- 4, 17, 0)

Un vector director de la recta “r” e **v** = **AB** = **b** – **a** = (-2 , 3, 1) - (2, -1, 1) = (-4, 4, 0).



Tomo un punto genérico Q de “r” formo el vector **PQ** y le impongo la condición de ser perpendicular con la recta r, **PQ•v** = 0, saco parámetro, saco punto Q.
La recta “s” perpendicular pedida es la que pasa por los puntos P y Q. Punto el P, vector el **PQ**.

Ponemos la recta “r” en forma paramétricas o vectorial. Tomamos como punto el A(2, -1, 1) y como vector el **v** = (-4, 4, 0).

La ecuación vectorial de la recta es r ≡ (2, -1, 1) + b·(-4, 4, 0) = (2 - 4b, -1 + 4b, 1), con b ∈ R.

Punto genérico de “r”, Q(2 - 4b, -1 + 4b, 1), con P(- 4, 17, 0) tenemos el vector **PQ** = (6 - 4b, -18 + 4b, 1). Imponemos la condición de perpendicularidad **PQ•v** = (6 - 4b, -18 + 4b, 1)• (-4, 4, 0) = -24 + 16b - 72 + 16b = 0, de donde -96 +32b = 0, es decir b = 3.

El punto Q es Q(2 – 4(3), -1 + 4(3), 1) = Q(- 10, 11, 1).

La recta perpendicular pedida es la que pasa por los puntos P y Q. Punto P(-4, 17, 0), y vector el **PQ** =
= (6 – 4(3), -18 + 4(3), 1) = (-6, 6, 1).

La recta perpendicular pedida sería s ≡ (x,y,z) = (-4, 17, 0) + c·(-6, 6, 1) = (-4 – 6c, 17 + 6c, c), con c ∈ R.

b)
Calcular la ecuación del plano respecto del cual los puntos A y B son simétricos.

Si A y B son simétricos, me están pidiendo el plano bisector del segmento AB, es decir el plano que pasa por el punto medio da AB y es perpendicular a “r”, por tanto el vector normal **n** del plano pedido coincide con el vector director de la recta, el **v**, luego **v** = **u** = (-4, 4, 0).

El punto medio del segmento A es M, con **m** = (**a** + **b**)/2, siendo m el vector de posición del punto M.

Tenemos **m** = ((-2 , 3, 1) + (2, -1, 1))/2 = (1/2)·(0 , 2, 2) = (0, 1, 1).

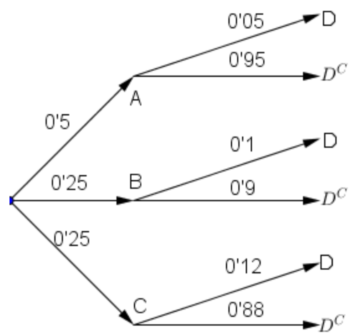
El plano pedido es π ≡ **MX•n = 0** = {siendo • el producto escalar} = (x-0, y-1, z-1)• (-4, 4, 0) **= -4x + 4y - 4 = 0**

4. Una planta ensambladora de circuitos recibe componentes procedentes de tres fabricantes A, B y C. El 50% del total de los componentes se compra al fabricante A, mientras que a los fabricantes B y C se le compra un 25% a cada uno. El porcentaje de componentes defectuosos es de un 5% para el fabricante A, el 10% para el fabricante B y el 12% para el fabricante C.
a) Construir el diagrama de árbol con las probabilidades asignadas. (0,5 ptos)
b) El Departamento de Control de la Calidad escoge un circuito al azar en el almacén, hallar la probabilidad de que contenga componentes defectuosos. (1 pto)
c) Escogido al azar un circuito que no tiene componentes defectuosos, ¿qué porcentaje de dichos componentes han sido vendidos por el proveedor B? (1 pto)

Llamemos A, B, C, D y D^C, a los sucesos siguientes, "fabricante A", "fabricante B", "fabricante C", "componente defectuoso" y "componente no defectuoso", respectivamente.

Datos del problema: p(A) = 0'5; p(B) = p(C) = 0'25; p(D/A) = 0'05; p(D/B) = 0'1, p(D/C) = 0'12, …
a)
Construir el diagrama de árbol con las probabilidades asignadas.

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



b)
El Departamento de Control de la Calidad escoge un circuito al azar en el almacén, hallar la probabilidad de que contenga componentes defectuosos. (1 pto)

Por el teorema de la Probabilidad Total:

Piden **p(D)** = p(A).p(D/A) + p(B).p(D/B) + p(C).p(D/C) = (0'5)·(0'05) + (0'25)·(0'1) + (0'25)·(0'12) **= 2/25 = 0'08**.
c)
Escogido al azar un circuito que no tiene componentes defectuosos, ¿qué porcentaje de dichos componentes han sido vendidos por el proveedor B? (1 pto)

Me piden **p(B/D^C)**.
Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(B/D^C) =} \frac{p\left(B \cap D^C\right)}{p(D^C)} = \frac{p\left(B\right)\cdot p(D^C/B)}{1 - p(D)} = \frac{(0'25)\cdot(0'9)}{1 - 0'08} \mathbf{= 45/184 \cong 0'244565 = 24'4565\ \%}.$$